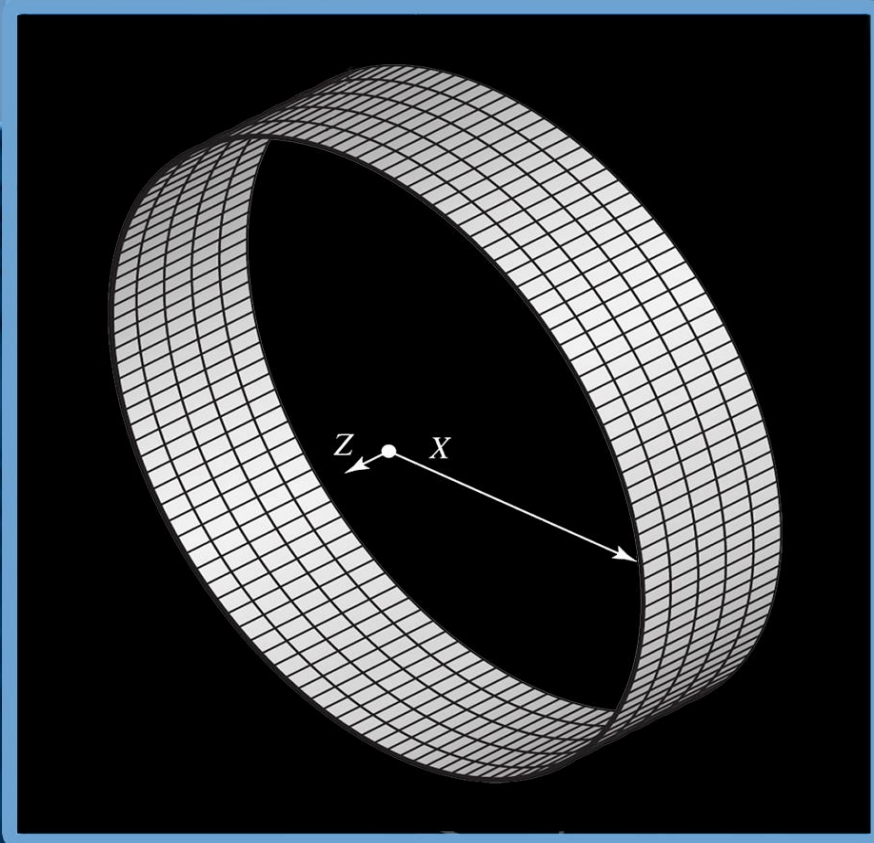


فصل ششم



روش باقیمانده‌های وزنی

مبانی تحلیل اجزاء محدود، تألیف دیوید هاتن، ترجمه شهاب الدین حاتمی و همکاران

مرجع اصلی:

فهرست مطالب

- ❖ مقدمه
- ❖ روش های باقی مانده
- ❖ روش باقی مانده های وزنی
- ❖ روش اجزاء محدود گالرکین
- ❖ کاربرد روش گالرکین برای المان های سازه ای
- ❖ سخن آخر

مقدمه

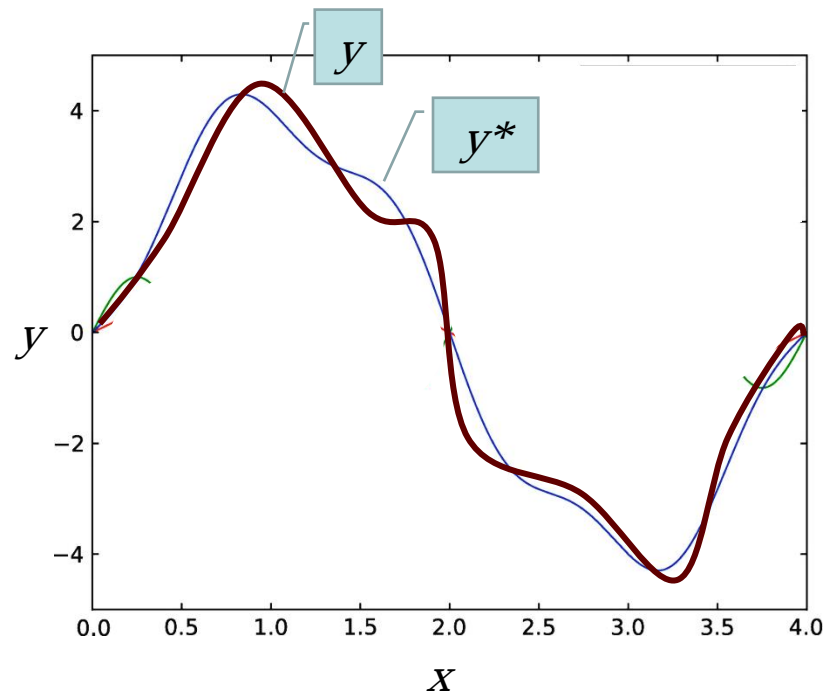
- در فصول گذشته آرائه های مفاهیم پایه ای روش اجزاء محدود در قالب المان های خطی انجام شد
- سهل الحصول بودن روابط نیرو-جابه جایی المان های خطی به علت استفاده از مفاهیم مقاومت مصالح مقدماتی است
- استفاده از تکنیک های ریاضی پیشرفته تر به منظور بسط روش تحلیل اجزاء محدود برای وضعیت های کلی تر به خصوص کاربردهای غیر سازه ای الزامی است
- تشریح روش باقی مانده های وزنی به عنوان ابزاری برای فرمول بندی مسائل میدانی است

پاسخ تقریبی

یک معادله دیفرانسیل به فرم کلی:
 $D[y(x), x] = 0 \quad a < x < b$
 با شرایط مرزی همگن:
 $y(a) = y(b) = 0$

جواب تقریبی این معادله دیفرانسیل را می توان با ترکیبی از توابع آزمایشی تقریب زد:

$$y^*(x) = \sum_{i=1}^n c_i N_i(x)$$



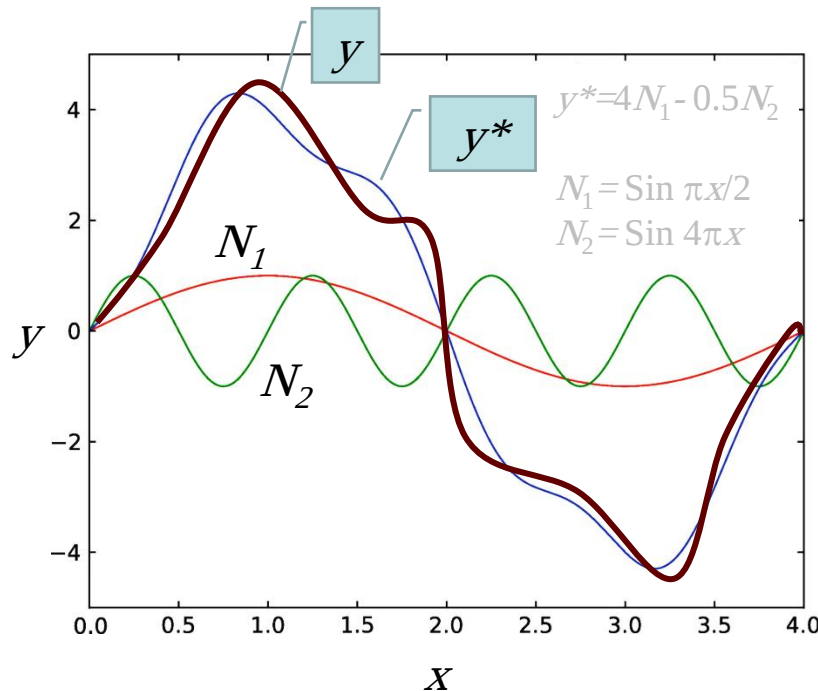
$$y^*(x) = \sum_{i=1}^n c_i N_i(x)$$

جواب تقریبی در روش های باقیمانده :

y^* : جواب تقریبی

c_i : پارامترهای ثابت مجهول

$N_i(x)$: توابع آزمایشی



توابع آزمایشی باید در سراسر دامنه پیوسته بوده و شرایط مرزی همگن را به طور دقیق ارضا کنند.

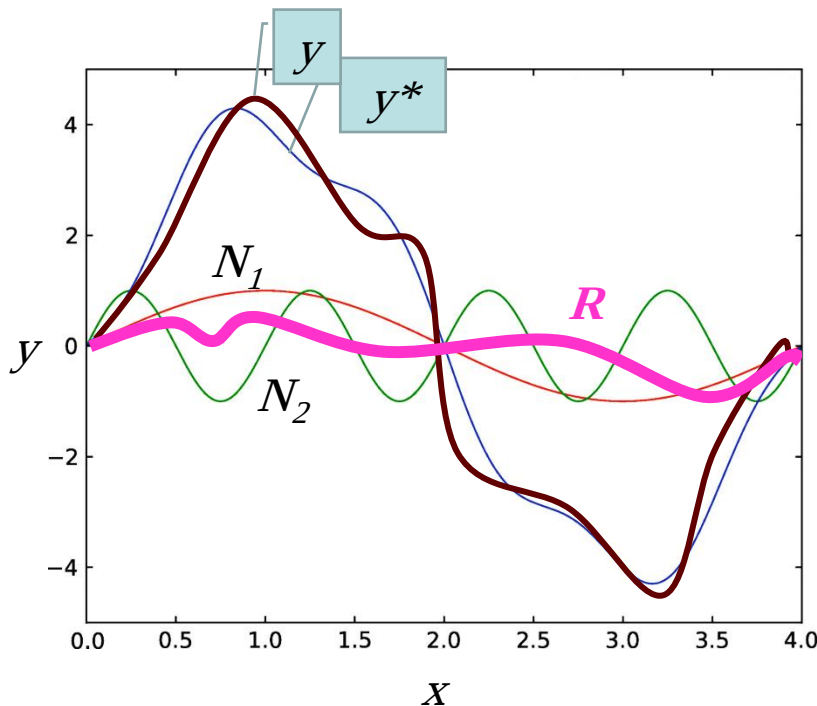
روش باقیمانده وزنی

$$R(x) = D[y^*(x), x] \neq 0$$

$$y^*(x) = \sum_{i=1}^n c_i N_i(x) \quad R(x) : \text{باقیمانده (تابعی از } x \text{ و پارامترهای مجهول } c_i)$$

در روش‌های باقیمانده وزنی
(Weighted Residuals Methods)،

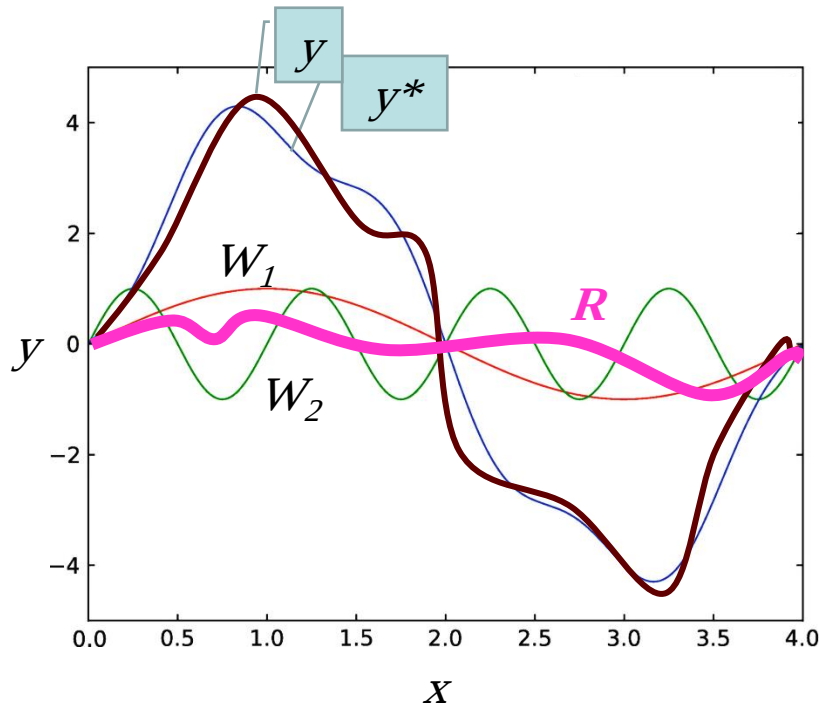
پارامترهای مجهول c_i به نحوی ارزیابی
شوند که باقیمانده (R)، کمترین مقدار
باشد.



در این روش‌ها با ایده حداقل کردن
باقیمانده، به تعداد پارامترهای
مجهول c_i (n)، معادله جبری بر
حسب c_i ‌ها تولید می‌شود.

$$R(x) = D[y^*(x), x] \neq 0$$

$$y^*(x) = \sum_{i=1}^n c_i N_i(x)$$



در روش های باقیمانده وزنی، برای تولید معادله جبری بر حسب c_i ها، انتگرال حاصلضرب تابع باقیمانده در توابع وزنی در دامنه مسئله مساوی صفر قرار داده می شود.

$$\int_a^b w_i(x) R(x) dx = 0$$

$$i = 1, n$$

n : تابع وزنی دلخواه $w_i(x)$

روش های باقیمانده وزنی

چند روش اصلی باقیمانده وزنی :

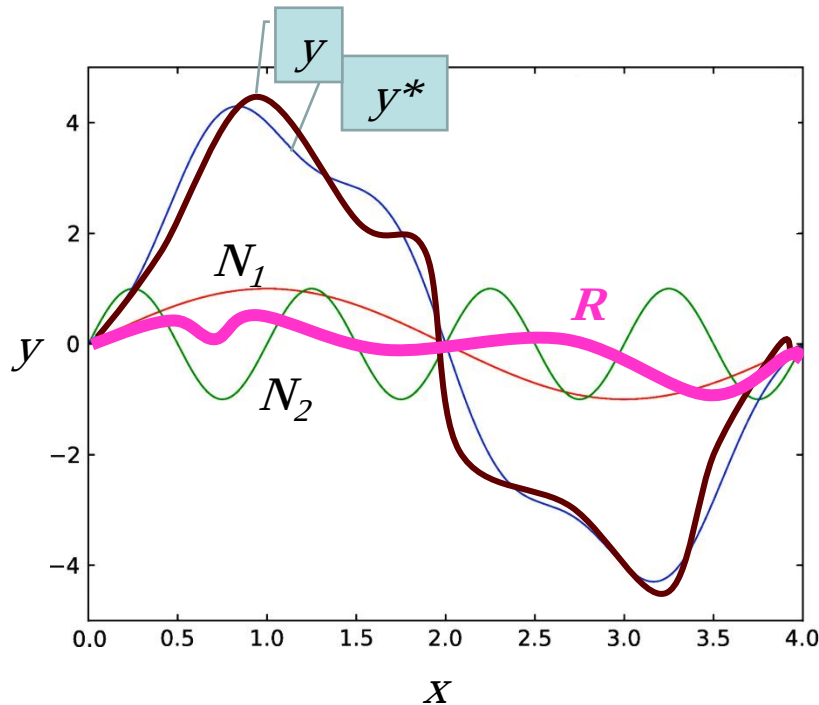
- تجمع نقطه ای collocation
- تجمع زیر مجموعه ای subdomain
- حداقل مربعات least squares
- روش گالرکین Galerkin's method

$$\int_a^b w_i(x) R(x) dx = 0 \quad i = 1, n$$

روش گالرکین

در روش باقیمانده های وزنی گالرکین، توابع وزنی همان توابع آزمایشی است.

$$w_i(x) = N_i(x) \quad i = 1, n$$

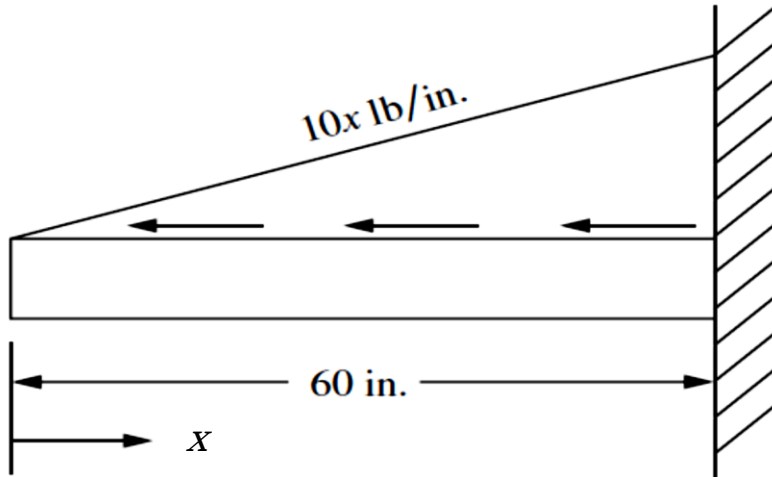


پارامترهای مجهول C_i از طریق روابط زیر تعیین می گردند:

$$\int_a^b N_i(x) R(x) dx = 0$$

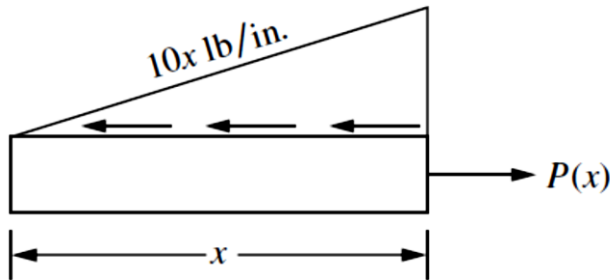
$$i = 1, n$$

چند روش باقیمانده وزنی



مثال: محاسبه تابع تغییر مکان
میله تحت بار گسترده خطی

برای تحلیل مسأله به روش باقیمانده
وزنی، ابتدا معادله دیفرانسیل حاکم بر
مسأله تعیین شده و براساس آن تابع
باقیمانده بدست می آید.

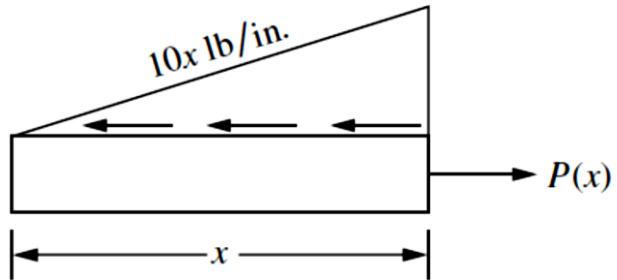


$$P(x) = 5x^2$$

$$A\sigma_x = P(x) \rightarrow AE\varepsilon_x = P(x)$$

$$\rightarrow AE \frac{du(x)}{dx} - P(x) = 0 \quad \text{معادله دیفرانسیل:}$$

$$u(x=L) = 0 \quad \text{شرایط مرزی:}$$



$$P(x) = 5x^2$$

حل دقیق معادله دیفرانسیل:

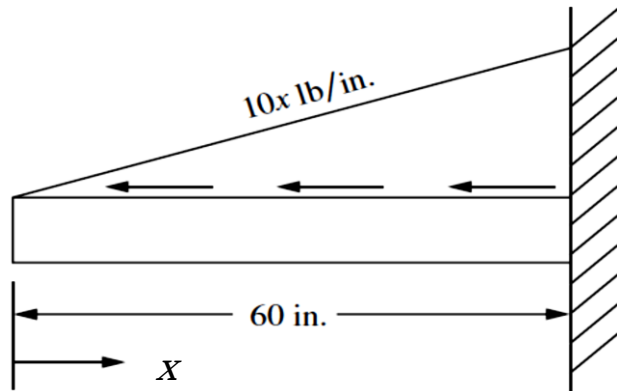
$$AE \frac{du(x)}{dx} - P(x) = 0 \quad \text{معادله دیفرانسیل:}$$

$$u = \frac{1}{AE} \int_0^x P(x) dx$$

$$u(x=L)=0 : \quad C_1 = -\frac{5L^3}{3AE}$$

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{AE} \int_0^x 5x^2 dx \\ &= \frac{5x^3}{3AE} + C_1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u = \frac{5}{3AE} (x^3 - L^3)$$



تابع تغییر مکان سازگار با شرایط مرزی:

$$u(x) = c_1(x - L) + c_2(x - L)^2 + c_3(x - L)^3$$

$$AE \frac{du(x)}{dx} - P(x) = 0$$

تابع باقیمانده:

$$\Rightarrow AE[c_1 + 2c_2(x - L) + 3c_3(x - L)^2] - 5x^2 = R$$

تابع دیراک دلتا

روش تجمع نقطه ای: Collocation Method

$$w_i(x) = \delta(x - x_i) \quad i = 1, n$$

$$\int_a^b w_i(x) R(x) dx = 0 \quad i = 1, n \quad \Rightarrow \quad R(x_i) = 0 \quad i = 1, n$$

تابع باقیمانده: $AE[c_1 + 2c_2(x - L) + 3c_3(x - L)^2] - 5x^2 = R$

$$R(c, \underline{x = 0}) = 0 = AE[c_1 + 2c_2(-L) + 3c_3(-L)^2] = 0$$

$$R(c, \underline{x = L/3}) = 0 = AE[c_1 + 2c_2(-2L/3) + 3c_3(-2L/3)^2] - 5(L/3)^2 = 0$$

$$R(c, \underline{x = 2L/3}) = 0 = AE[c_1 + 2c_2(-L/3) + 3c_3(-L/3)^2] - 5(2L/3)^2 = 0$$

$$\Rightarrow c_1 = 5L^2/(AE) \quad c_2 = 5L/(AE) \quad c_3 = 5/(3AE)$$

Here, the method yields the identical solution as the exact solution

روش تجمع زیر مجموعه ای: subdomain Method

$$w_i(x) = \begin{cases} 1 & : x_i \leq x < x_{i+1} \\ 0 & \text{بقیه دامنه} \end{cases} \quad i = 1, n$$

$$\int_a^b w_i(x) R(x) dx = 0 \quad i = 1, n \quad \Rightarrow \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} R(x) dx = 0 \quad i = 1, n$$

تابع باقیمانده: $AE[c_1 + 2c_2(x - L) + 3c_3(x - L)^2] - 5x^2 = R$

$$\int_0^{L/3} R dx = 0 = \int_0^{L/3} \{AE[c_1 + 2c_2(x - L) + 3c_3(x - L)^2] - 5x^2\} dx$$

$$\int_{L/3}^{2L/3} R dx = 0 = \int_{L/3}^{2L/3} \{AE[c_1 + 2c_2(x - L) + 3c_3(x - L)^2] - 5x^2\} dx$$

$$\int_{2L/3}^L R dx = 0 = \int_{2L/3}^L \{AE[c_1 + 2c_2(x - L) + 3c_3(x - L)^2] - 5x^2\} dx$$

Here, the method yields the identical solution as the exact solution

روش حداقل مربعات: Least Square Method

$$w_i(x) = \frac{\partial R}{\partial c_i} \quad i = 1, n$$

$$\int_a^b w_i(x) R(x) dx = 0 \quad i = 1, n \Rightarrow \int_0^L R \frac{\partial R}{\partial c_i}(x) dx = 0 \text{ or } \frac{\partial}{\partial c_i} \int_0^L R^2(x) dx = 0, \quad i = 1, n$$

$$AE[c_1 + 2c_2(x - L) + 3c_3(x - L)^2] - 5x^2 = R \quad \text{تابع باقیمانده:}$$

$$\frac{\partial R}{\partial c_1} = AE, \quad \frac{\partial R}{\partial c_2} = AE2(x - L), \quad \frac{\partial R}{\partial c_3} = AE3(x - L)^2$$

$$\int_0^L \{AE[c_1 + 2c_2(x - L) + 3c_3(x - L)^2] - 5x^2\} AE dx = 0$$

$$\int_0^L \{AE[c_1 + 2c_2(x - L) + 3c_3(x - L)^2] - 5x^2\} AE2(x - L) dx = 0$$

$$\int_0^L \{AE[c_1 + 2c_2(x - L) + 3c_3(x - L)^2] - 5x^2\} AE3(x - L)^2 dx = 0$$

Here, the method yields the identical solution as the exact solution

روش گالرکین: Galerkin's Method

$$w_i(x) = N_i(x) \quad i = 1, n$$

$$\int_a^b w_i(x) R(x) dx = 0 \quad i = 1, n \quad \Rightarrow \quad \int_a^b N_i(x) R(x) dx = 0 \quad i = 1, n$$

$$AE[c_1 + 2c_2(x - L) + 3c_3(x - L)^2] - 5x^2 = R \quad \text{تابع باقیمانده:}$$

$$W_1 = x - L \quad W_2 = (x - L)^2 \quad W_3 = (x - L)^3$$

$$\int_0^L \{AE[c_1 + 2c_2(x - L) + 3c_3(x - L)^2] - 5x^2\} (x - L) dx = 0$$

$$\int_0^L \{AE[c_1 + 2c_2(x - L) + 3c_3(x - L)^2] - 5x^2\} (x - L)^2 dx = 0$$

$$\int_0^L \{AE[c_1 + 2c_2(x - L) + 3c_3(x - L)^2] - 5x^2\} (x - L)^3 dx = 0$$

Here, the method yields the identical solution as the exact solution

مثال ۱

با استفاده از روش باقیمانده های وزنی گالرکین جواب تقریبی معادله دیفرانسیل زیر را با شرایط مرزی $y(0) = y(1) = 0$ به دست آورید.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 10x^2 = 5 \quad 0 \leq x \leq 1$$

مثال ۱

حل:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 10x^2 - 5 = 0$$

برای شرایط مرزی همگن در $x = x_a$ و $x = x_b$:

فرم کلی توابع آزمایشی چند جمله ای:

$$N(x) = (x - x_a)^p (x - x_b)^q$$

مثال ۱

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 10x^2 - 5 = 0$$

$$N(x) = (x - x_a)^p (x - x_b)^q$$

$$N_1(x) = x(x - 1)$$

استفاده از فقط یک تابع آزمایشی به ساده ترین فرمی که شرایط مرزی بیان شده را فراهم کند :

$$y^*(x) = c_1 x(x - 1)$$

جواب تقریبی معادله:

$$\frac{dy^*}{dx} = c_1(2x - 1)$$

جواب دقیق معادله دیفرانسیل به گونه ای است که مشتق دوم آن تابعی درجه دوم از x است اما در اینجا مشتق دوم جواب تقریبی مقداری ثابت دارد.

$$\frac{d^2 y^*}{dx^2} = 2c_1$$

$$R(x; c) = 2c_1 - 10x^2 - 5$$

مثال ۱

$$R(x; c) = 2c_1 - 10x^2 - 5$$

$$\int_a^b N_1(x) R(x) dx = 0$$

جایگذاری $R(x)$ در رابطه فوق:

$$\int_0^1 x(x-1)(2c_1 - 10x^2 - 5) dx = 0 \quad \longrightarrow \quad c_1 = 4$$

$$y^*(x) = 4x(x-1)$$

جواب تقریبی:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 10x^2 - 5 = 0$$

مثال ۱

حل جواب دقیق:

$$\frac{dy}{dx} = \int \frac{d^2 y}{dx^2} dx = \int (10x^2 + 5) dx = \frac{10x^3}{3} + 5x + C_1$$

$$y(x) = \int \frac{dy}{dx} dx = \int \left(\frac{10x^3}{3} + 5x + C_1 \right) dx = \frac{5x^4}{6} + \frac{5x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

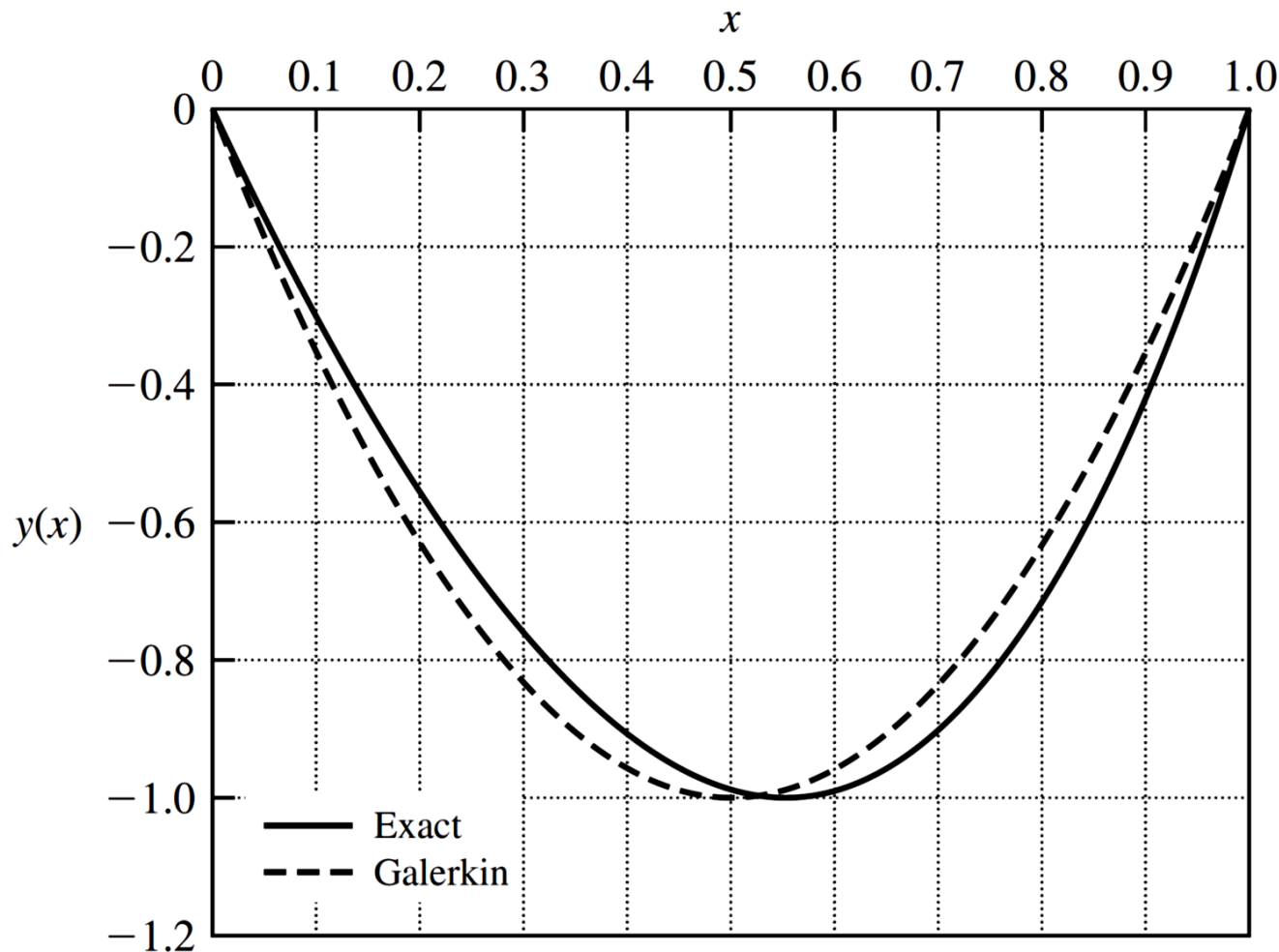
$$\begin{cases} y(0) = 0 & C_2 = 0 \\ y(1) = 0 & \frac{5}{6} + \frac{5}{2} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{10}{3} \end{cases}$$

با اعمال شرایط مرزی:

جواب دقیق:

$$y(x) = \frac{5}{6}x^4 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{10}{3}x$$

مثال ۱



مثال ۲

یک جواب گالرکین دو عبارتی برای مسئله مثال ۱ با استفاده از توابع آزمایشی زیر به دست آورید.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 10x^2 - 5 = 0$$

$$N_1(x) = x(x - 1) \qquad N_2(x) = x^2(x - 1)$$

$$y^* = c_1 x(x - 1) + c_2 x^2(x - 1)$$

$$\frac{d^2 y^*}{dx^2} = 2c_1 + 2c_2(3x - 1)$$

$$R(x; c_1, c_2) = 2c_1 + 2c_2(3x - 1) - 10x^2 - 5$$

مثال ۲

$$R(x; c_1, c_2) = 2c_1 + 2c_2(3x - 1) - 10x^2 - 5$$

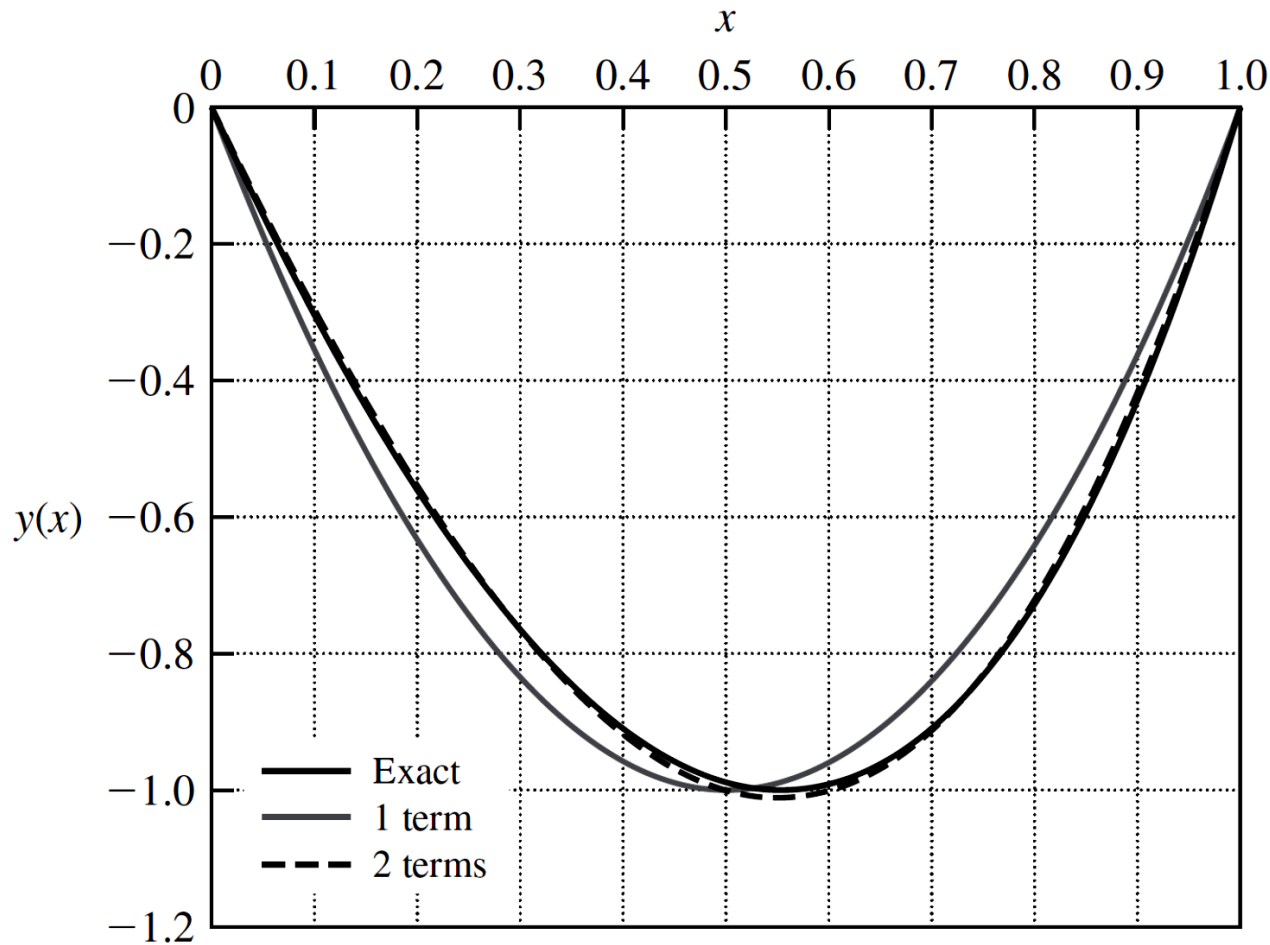
$$\int_0^1 x(x-1)[2c_1 + 2c_2(3x-1) - 10x^2 - 5]dx = 0$$

$$\int_0^1 x^2(x-1)[2c_1 + 2c_2(3x-1) - 10x^2 - 5]dx = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \begin{cases} -\frac{c_1}{3} - \frac{c_2}{6} + \frac{4}{3} = 0 \\ -\frac{c_1}{6} - \frac{2c_2}{15} + \frac{3}{4} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{19}{6}, \quad c_2 = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$y^* = \frac{19}{6}x(x-1) + \frac{5}{3}x^2(x-1) = \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{19}{6}x$$

مثال ۲



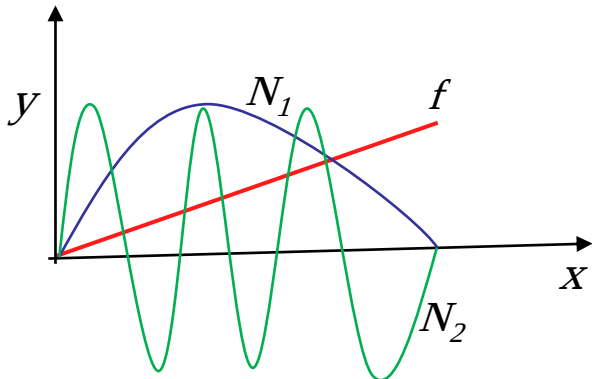
مثال ۳

با استفاده از روش باقیمانده های وزنی گالرکین یک تقریب یک عبارتی برای جواب معادله دیفرانسیل زیر با شرایط مرزی ناهمگن به دست آورید:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 4x \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \begin{cases} y(0) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

در حالت کلی فرم پاسخ مسائل ناهمگن چنین اختیار می شود:

$$y^*(x) = \left\{ \sum_{i=1}^n c_i N_i(x) \right\} + f(x)$$



عبارت داخل کروشه شرایط مرزی همگن را ارضا می کند و f برای تامین شرایط مرزی ناهمگن به آن اضافه می شود.

مثال ۳

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y - 4x = 0$$

حل:

$$y^* = c_1 N_1(x) + f(x)$$

$N_1(x)$: شرایط مرزی همگن را ارضا کند

$f(x)$: به نحوی انتخاب می شود که شرط غیر همگن را فراهم نماید

یک نمونه جواب:

$$y^* = c_1 x(x - 1) + x$$

$$\begin{aligned} R(x; c_1) &= \frac{d^2 y^*}{dx^2} + y^* - 4x = 2c_1 + c_1 x^2 - c_1 x + x - 4x \\ &= c_1 x^2 - c_1 x + 2c_1 - 3x \end{aligned}$$

مثال ۳

انتگرال باقیمانده وزنی:

$$\int_0^1 N_1(x) R(x, c_1) dx = \int_0^1 x(x-1)(c_1 x^2 - c_1 x + 2c_1 - 3x) dx = 0$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{5}{6}$$

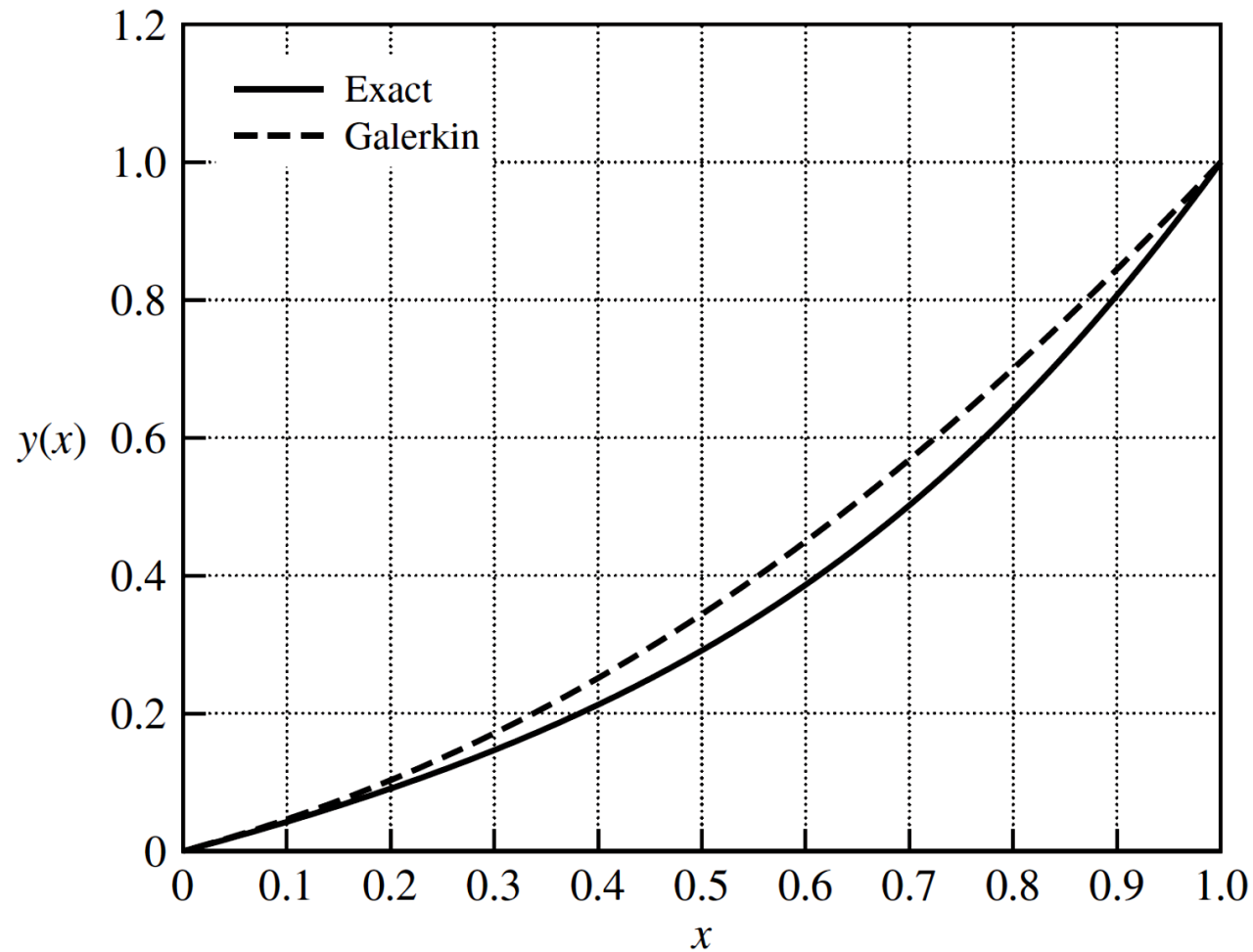
جواب تقریبی:

$$y^*(x) = \frac{5}{6}x(x-1) + x = \frac{5}{6}x^2 + \frac{1}{6}x$$

جواب دقیق این معادله دیفرانسیل به صورت زیر می باشد:

$$y(x) = 4x - 3.565 \sin x$$

مثال ۳



مثال ۴

مثال ۱ را با فرض یک فرم چند جمله ای کلی حل کنید.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 10x^2 = 5 \quad 0 \leq x \leq 1 \quad y(0) = y(1) = 0$$

$$y^*(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

حل:

$$y^*(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$

سعی اول:

$$y^*(0) = 0 = c_0$$

$$y^*(1) = 0 = c_1 + c_2$$

اعمال شرایط مرزی

$$y^*(x) = c_1 x + c_2 x^2 = c_1 x - c_1 x^2 = c_1 x(1 - x)$$

مثال ۴

$$y^*(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$$

سعی دوم:

$$y^*(0) = 0 = c_0$$

$$y^*(1) = 0 = c_1 + c_2 + c_3$$

با اعمال شرایط مرزی:

$$\begin{aligned} y^*(x) &= c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 = c_1x + c_2x^2 - (c_1 + c_2)x^3 \\ &= c_1x(1 - x^2) + c_2x^2(1 - x) \end{aligned}$$

$$y^*(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4$$

سعی سوم:

$$c_0 = 0$$

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0$$

با اعمال شرایط مرزی:

$$\begin{aligned} y^*(x) &= c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 - (c_1 + c_2 + c_3)x^4 \\ &= c_1x(1 - x^3) + c_2x^2(1 - x^2) + c_3x^3(1 - x) \end{aligned}$$

مثال ۴

با جایگذاری y^* (سعی سوم) در معادله دیفرانسیل، باقیمانده به صورت زیر به دست می آید:

$$R(x; c_1, c_2, c_3) = -12c_1x^2 + c_2(2 - 12x^2) + c_3(6x - 12x^2) - 10x^2 - 5$$

$$c_1 = -\frac{10}{3}, \quad c_3 = 0$$

$$c_2 = \frac{5}{2}, \quad c_4 = \frac{5}{6}$$

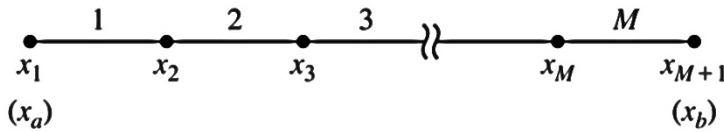
با انتگرال گیری از باقیمانده وزنی:

$$y^*(x) = \frac{5}{6}x^4 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{10}{3}x$$

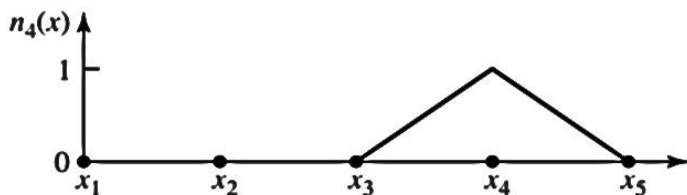
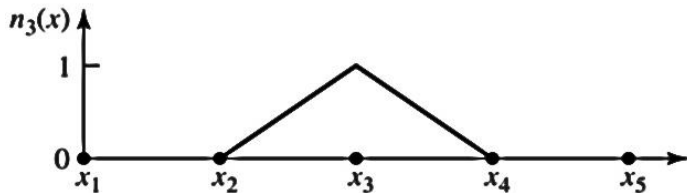
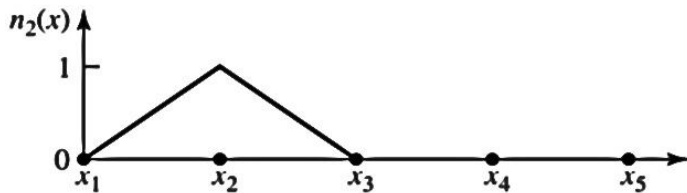
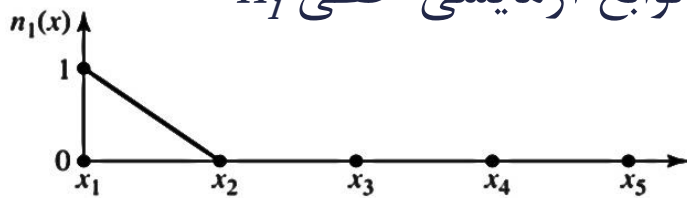
در نتیجه:

که منطبق بر جواب دقیق است.

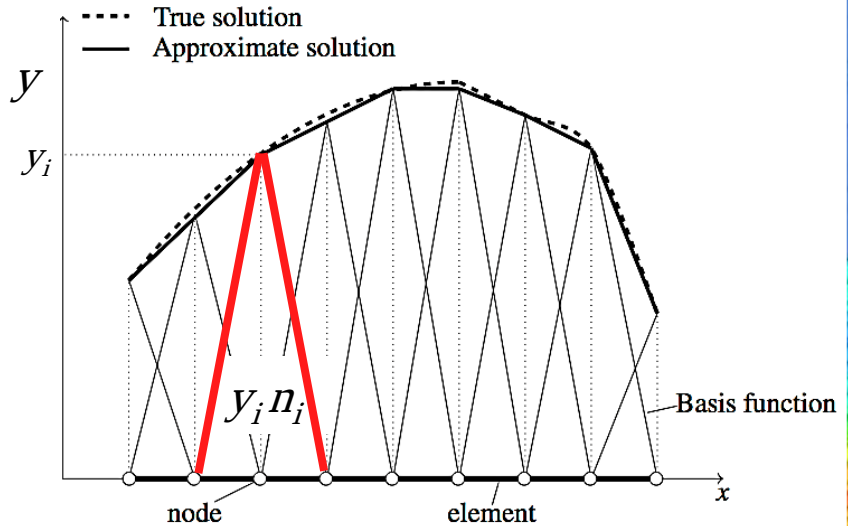
روش اجزاء محدود گالرکین



توابع آزمایشی خطی n_i



$$y^*(x) = \sum_{i=1}^{M+1} y_i n_i(x)$$

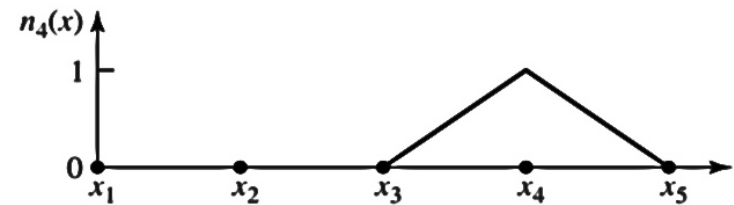
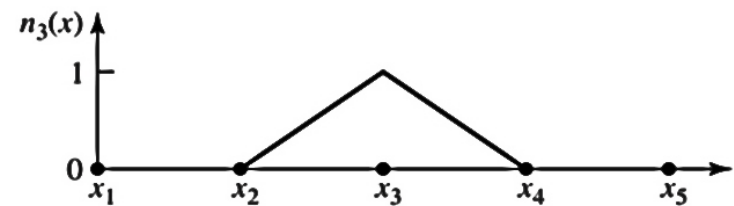
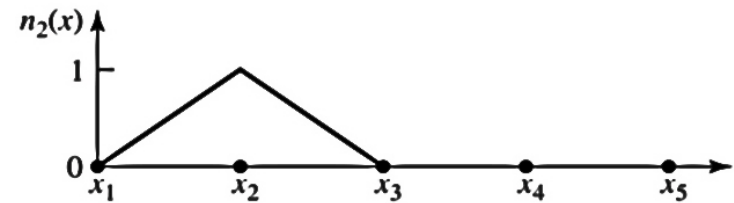


$$n_i(x) = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i$$

$$n_i(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}$$

$$n_i(x) = 0 \quad x < x_{i-1} \quad x > x_{i+1}$$

در هر بازه، مقدار تقریبی Y ترکیب خطی مقادیر Y_i در دو گره مجاور است، به عنوان مثال در بازه X_2 تا X_3 داریم:



$$y^*(x) = y_2 n_2(x) + y_3 n_3(x) = y_2 \frac{x_3 - x}{x_3 - x_2} + y_3 \frac{x - x_2}{x_3 - x_2}$$

به عنوان مثال، برای معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی مقابل:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + f(x) = 0 \quad x_a \leq x \leq x_b$$

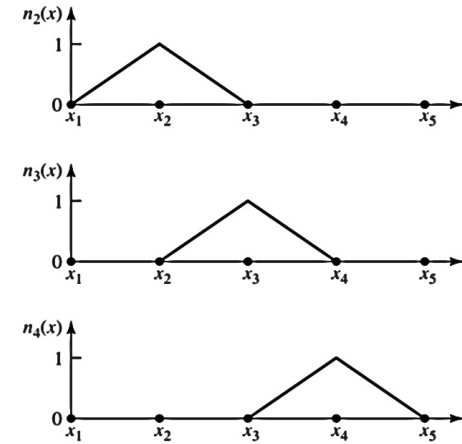
$$y(x_a) = y_a \quad y(x_b) = y_b$$

$$R(x; y_i) = \left[\frac{d^2 y^*}{dx^2} + f(x) \right] = \sum_{i=1}^{M+1} \left[\frac{d^2}{dx^2} \{y_i n_i(x)\} + f(x) \right]$$

$$\int_{x_a}^{x_b} n_j(x) R(x; y_i) dx = 0 ; \quad j = 1, M + 1$$

$$\rightarrow \int_{x_a}^{x_b} n_j(x) \sum_{i=1}^{M+1} \left[\frac{d^2}{dx^2} \{y_i n_i(x)\} + f(x) \right] dx = 0 ; \quad j = 1, M + 1$$

در هر بازه ی $x_j \leq x \leq x_{j+1}$ (و به عبارتی در بازه هر المان) تنها دو تابع آزمایشی غیر صفر وجود دارد (یکی در شاخه صعودی و دیگری در شاخه نزولی)، لذا می توان نوشت:



$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} n_j(x) \left[\frac{d^2}{dx^2} (y_j n_j(x) + y_{j+1} n_{j+1}(x)) + f(x) \right] dx = 0 \quad j = 1, M+1$$

$M+1$ معادله جبری بدست آمده را بصورت ماتریسی می نویسیم:

$$[K]\{y\} = \{F\}$$

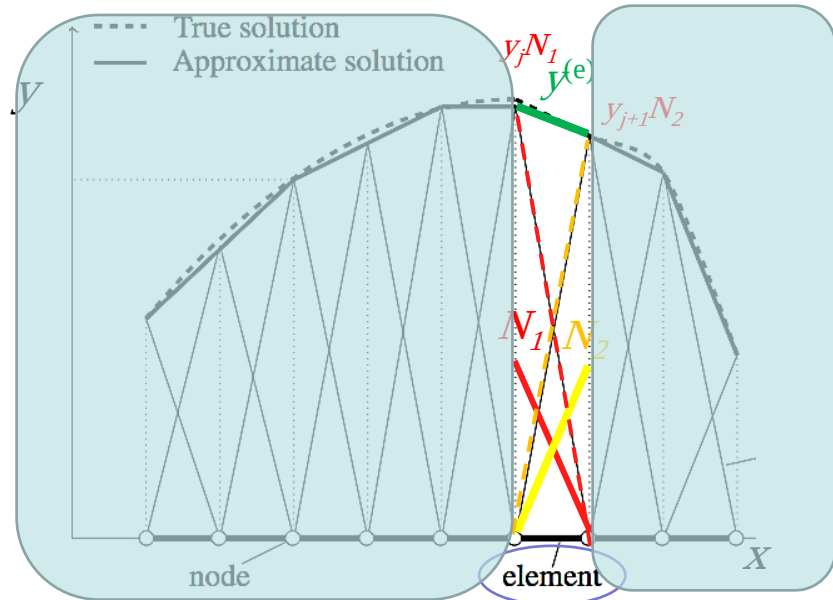
$[K]$: ماتریس سختی سیستم
 $\{y\}$: بردار جابجایی های گرهی
 $\{F\}$: بردار نیروهای گرهی می باشد.

روش اجزاء محدود گالرکین | فرمول بندی المان

$$\frac{d^2 y}{d^2 x} + f(x) = 0 \quad x_j \leq x \leq x_{j+1}$$

$$y(x_j) = y_j \quad y(x_{j+1}) = y_{j+1}$$

$$y^{(e)}(x) = y_j N_1(x) + y_{j+1} N_2(x)$$

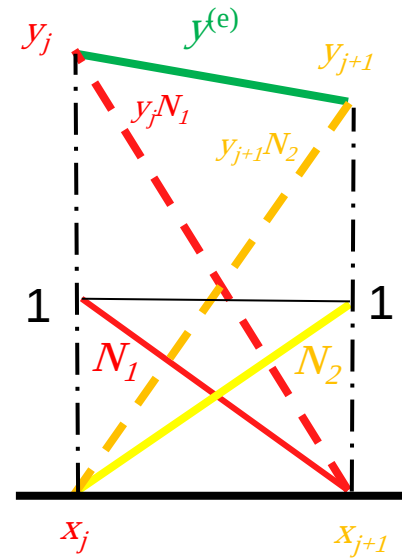


توابع درونیاب در رابطه فوق چنین تعریف می شوند:

$$N_1(x) = \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} \quad x_j \leq x \leq x_{j+1}$$

$$N_2(x) = \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} \quad x_j \leq x \leq x_{j+1}$$

$$\begin{aligned} N_1(x = x_j) &= 1 & N_1(x = x_{j+1}) &= 0 \\ N_2(x = x_j) &= 0 & N_2(x = x_{j+1}) &= 1 \end{aligned}$$



$$R^{(e)}(x; y_j, y_{j+1}) = \frac{d^2 y^{(e)}}{dx^2} + f(x)$$

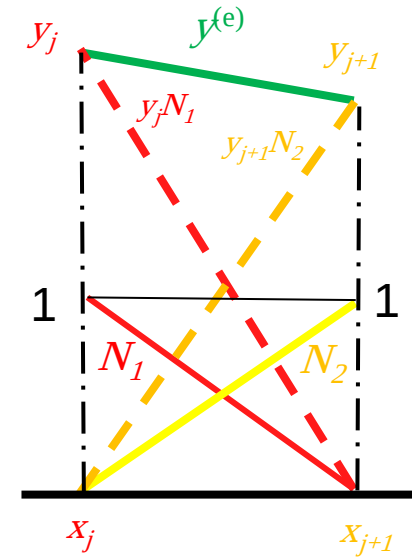
$$R^{(e)} = \frac{d^2}{dx^2} [y_j N_1(x) + y_{j+1} N_2(x)] + f(x) \neq 0$$

$$R^{(e)} = \frac{d^2}{dx^2} [y_j N_1(x) + y_{j+1} N_2(x)] + f(x)$$

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} N_i(x) R^{(e)}(x; y_j, y_{j+1}) dx = 0 \quad i = 1, 2$$

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} N_i(x) \frac{d^2 y^{(e)}}{dx^2} dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} N_i(x) f(x) dx = 0 \quad i = 1, 2$$

یا



با انجام انتگرال گیری جزء به جزء برای اولین انتگرال، نتیجه می شود که

$$N_i(x) \frac{dy^{(e)}}{dx} \Big|_{x_j}^{x_{j+1}} - \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{dN_i}{dx} \frac{dy^{(e)}}{dx} dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} N_i(x) f(x) dx = 0 \quad i = 1, 2$$

$$N_i(x) \frac{dy^{(e)}}{dx} \Big|_{x_j}^{x_{j+1}} - \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{dN_i}{dx} \frac{dy^{(e)}}{dx} dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} N_i(x) f(x) dx = 0$$

for i=1:
$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{dN_1}{dx} \frac{dy^{(e)}}{dx} dx = \int_{x_j}^{x_{j+1}} N_1(x) f(x) dx + \frac{dy^{(e)}}{dx} \Big|_{x_j}$$

for i=2:
$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{dN_2}{dx} \frac{dy^{(e)}}{dx} dx = \int_{x_j}^{x_{j+1}} N_2(x) f(x) dx - \frac{dy^{(e)}}{dx} \Big|_{x_{j+1}}$$

✓ بیشترین مرتبه مشتق ظاهر شده در روابط المان یکی کاهش می یابد.

✓ ماتریس سختی متقارن ایجاد می شود.

✓ شرایط مرزی گرادیان را در گره های المان ایجاد می کند.

مزایای انتگرال گیری
جزء به جزء

برای سادگی نوشتار در درون هر المان

$$\begin{cases} x_j \equiv x_1, & x_{j+1} \equiv x_2 \\ y_j \equiv y_1, & y_{j+1} \equiv y_2 \end{cases}$$

$$y^{(e)}(x) = y_1 N_1(x) + y_2 N_2(x)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dN_1}{dx} \left[y_1 \frac{dN_1}{dx} + y_2 \frac{dN_2}{dx} \right] dx = \int_{x_1}^{x_2} N_1(x) f(x) dx + \frac{dy^{(e)}}{dx} \Big|_{x_1}$$

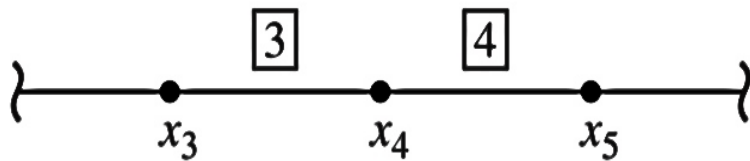
$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dN_2}{dx} \left[y_1 \frac{dN_1}{dx} + y_2 \frac{dN_2}{dx} \right] dx = \int_{x_1}^{x_2} N_2(x) f(x) dx - \frac{dy^{(e)}}{dx} \Big|_{x_2}$$

و در فرم ماتریسی:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

$$k_{ij} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx \quad i, j = 1, 2$$

که درایه های ماتریس ضرایب
(ماتریس سختی المان):



$$y^{(3)}(x_4) = y^{(4)}(x_4)$$

$$\left. \frac{dy^{(3)}}{dx} \right|_{x_4} \neq \left. \frac{dy^{(4)}}{dx} \right|_{x_4}$$

با اتصال دو المان مجاور در یک گره مشترک؛ عبارتی به فرم زیر در سمت راست معادله سیستم مونتاژ شده ظاهر می شود که الزاما صفر نیست مگر در حل دقیق. با این وجود در گره های میانی، این عبارت صفر فرض می شود:

$$-\frac{dy^{(3)}}{dx} \Big|_{x_4} + \frac{dy^{(4)}}{dx} \Big|_{x_4}$$

مثال ۵

با استفاده از روش گالرکین بکار برده شده برای فرمول بندی یک المان محدود خطی، معادله دیفرانسیل زیر با شرایط مرزی همگن را حل کنید.

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 4x = 0 \quad 1 \leq x \leq 2$$

$$y(1) = y(2) = 0$$

مثال ۵

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 4x = 0$$

حل دقیق:

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) - 4x = 0$$

دوبار انتگرال گیری مستقیم و اعمال شرایط مرزی:

$$y(x) = x^2 - \frac{3}{\ln 2} \ln x - 1$$

حل عددی:

برای هر المان دو گرهی دلخواه در محدوده x_1 تا x_2 :

$$y(x) = N_1(x)y_1 + N_2(x)y_2 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} y_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} y_2$$

y_1 و y_2 مقادیر جواب در گره های هر المان می باشند.

مثال ۵

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) - 4x = 0 \quad y(x) = N_1(x)y_1 + N_2(x)y_2$$

معادله باقیمانده برای این المان برابر است با

$$\int_{x_1}^{x_2} N_i \left[\frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) - 4x \right] dx = 0 \quad i = 1, 2$$

یک بار انتگرال گیری جزء به جزء:

$$N_i x \frac{dy}{dx} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} x \frac{dN_i}{dx} \frac{dy}{dx} dx - \int_{x_1}^{x_2} 4x N_i dx = 0 \quad i = 1, 2$$

با جایگذاری فرم جواب المانی در رابطه بالا و پس از مرتب کردن:

$$\int_{x_1}^{x_2} x \frac{dN_i}{dx} \left(\frac{dN_1}{dx} y_1 + \frac{dN_2}{dx} y_2 \right) dx = N_i x \frac{dy}{dx} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} 4x N_i dx \quad i = 1, 2$$

مثال ۵

$$\int_{x_1}^{x_2} x \frac{dN_i}{dx} \left(\frac{dN_1}{dx} y_1 + \frac{dN_2}{dx} y_2 \right) dx = N_i x \frac{dy}{dx} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} 4x N_i dx \quad i = 1, 2$$

for i=1:
$$\frac{1}{(x_2 - x_1)^2} \int_{x_1}^{x_2} x(y_1 - y_2) dx = -x_1 \frac{dy}{dx} \Big|_{x_1}^{x_2} - 4 \int_{x_1}^{x_2} x \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} dx$$

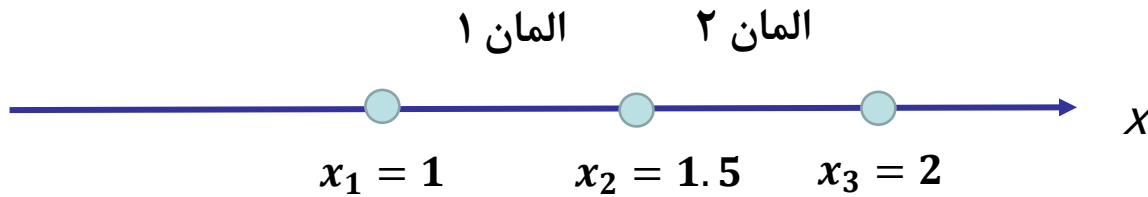
for i=2:
$$\frac{1}{(x_2 - x_1)^2} \int_{x_1}^{x_2} x(y_2 - y_1) dx = x_2 \frac{dy}{dx} \Big|_{x_2}^{x_1} - 4 \int_{x_1}^{x_2} x \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} dx$$

با انتگرال گیری از عبارات سمت چپ، ماتریس سختی المان به صورت زیر به دست می آید:

$$[k^{(e)}] = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad k = \frac{x_2^2 - x_1^2}{2(x_2 - x_1)^2}$$

در حالی که شرایط مرزی شیب و نیروهای گرهی در طرف راست معادلات ظاهر شده اند

مثال ۵



یک حل دو المانی:

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 1.5 \quad k = 2.5$$

$$F_1^{(1)} = -4 \int_1^{1.5} x \frac{1.5 - x}{1.5 - 1} dx = -1.166666 - \frac{dy}{dx} \Big|_{x_1}$$

المان ۱

$$F_2^{(1)} = -4 \int_1^{1.5} x \frac{x - 1}{1.5 - 1} dx = -1.133333 + 1.5 \frac{dy}{dx} \Big|_{x_2}$$

$$x_1 = 1.5 \quad x_2 = 2 \quad k = 3.5$$

$$F_1^{(2)} = -4 \int_{1.5}^2 x \frac{2 - x}{2 - 1.5} dx = -1.166666 - 1.5 \frac{dy}{dx} \Big|_{x_2}$$

المان ۲

$$F_2^{(2)} = -4 \int_{1.5}^2 x \frac{x - 1.5}{2 - 1.5} dx = -1.833333 + 2 \frac{dy}{dx} \Big|_{x_2}$$

مثال ۵

$$\begin{bmatrix} 2.5 & -2.5 \\ -2.5 & 2.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.1667 - \frac{dy}{dx}|_{x_1} \\ -1.3333 + 1.5 \frac{dy}{dx}|_{x_2} \end{Bmatrix}$$

معادلات المان ها :

$$\begin{bmatrix} 3.5 & -3.5 \\ -3.5 & 3.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1^{(2)} \\ y_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.1667 - 1.5 \frac{dy}{dx}|_{x_2} \\ -1.8333 + 2 \frac{dy}{dx}|_{x_3} \end{Bmatrix}$$

مقادیر گرهی سیستم در $x = 1, 1.5, 2$ به ترتیب عبارتند Y_1 ، Y_2 و Y_3

$$\begin{bmatrix} 2.5 & -2.5 & 0 \\ -2.5 & 6 & -3.5 \\ 0 & -3.5 & 3.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.1667 - \frac{dy}{dx}|_{x_1} \\ -3 \\ -1.8333 + 2 \frac{dy}{dx}|_{x_3} \end{Bmatrix}$$

مثال ۵

$$\begin{bmatrix} 2.5 & -2.5 & 0 \\ -2.5 & 6 & -3.5 \\ 0 & -3.5 & 3.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.1667 - \frac{dy}{dx}|_{x_1} \\ -3 \\ -1.8333 + 2 \frac{dy}{dx}|_{x_3} \end{Bmatrix}$$

با اعمال شرایط مرزی کلی $Y_1 = Y_3 = 0$ از حل دومین معادله: $Y_2 = -0.5$
با قرار دادن مقادیر Y_i در معادلات اول و دوم:

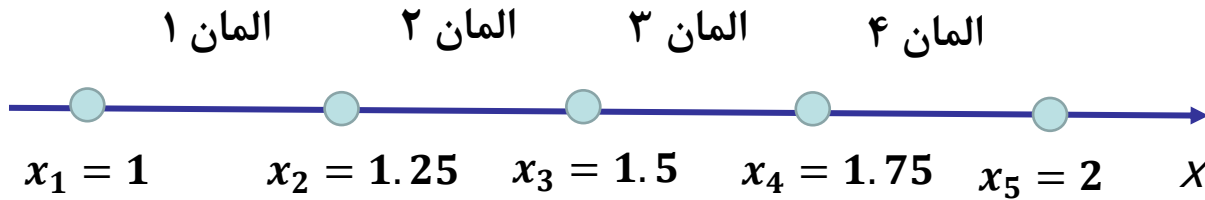
$$\frac{dy}{dx}|_{x_1} = -2.4167 \qquad \frac{dy}{dx}|_{x_3} = 1.7917$$

مقادیر جواب دقیق:

$$y(x = 1.5) = Y_2 = -0.5049$$

$$\frac{dy}{dx}|_{x_1} = -2.3281 \qquad \frac{dy}{dx}|_{x_3} = 1.8360$$

مثال ۵



یک حل چهار المانی:

$$\begin{bmatrix} 4.5 & -4.5 & 0 & 0 & 0 \\ -4.5 & 10 & -5.5 & 0 & 0 \\ 0 & -5.5 & 12 & -6.5 & 0 \\ 0 & 0 & -6.5 & 14 & -7.5 \\ 0 & 0 & 0 & -7.5 & 7.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.5417 - \frac{dy}{dx}|_{x_1} \\ -1.25 \\ -1.5 \\ -1.75 \\ -0.9583 + 2 \frac{dy}{dx}|_{x_5} \end{Bmatrix}$$

$$Y_1 = 0$$

$$Y_5 = 0$$

$$Y_2 = -0.4026$$

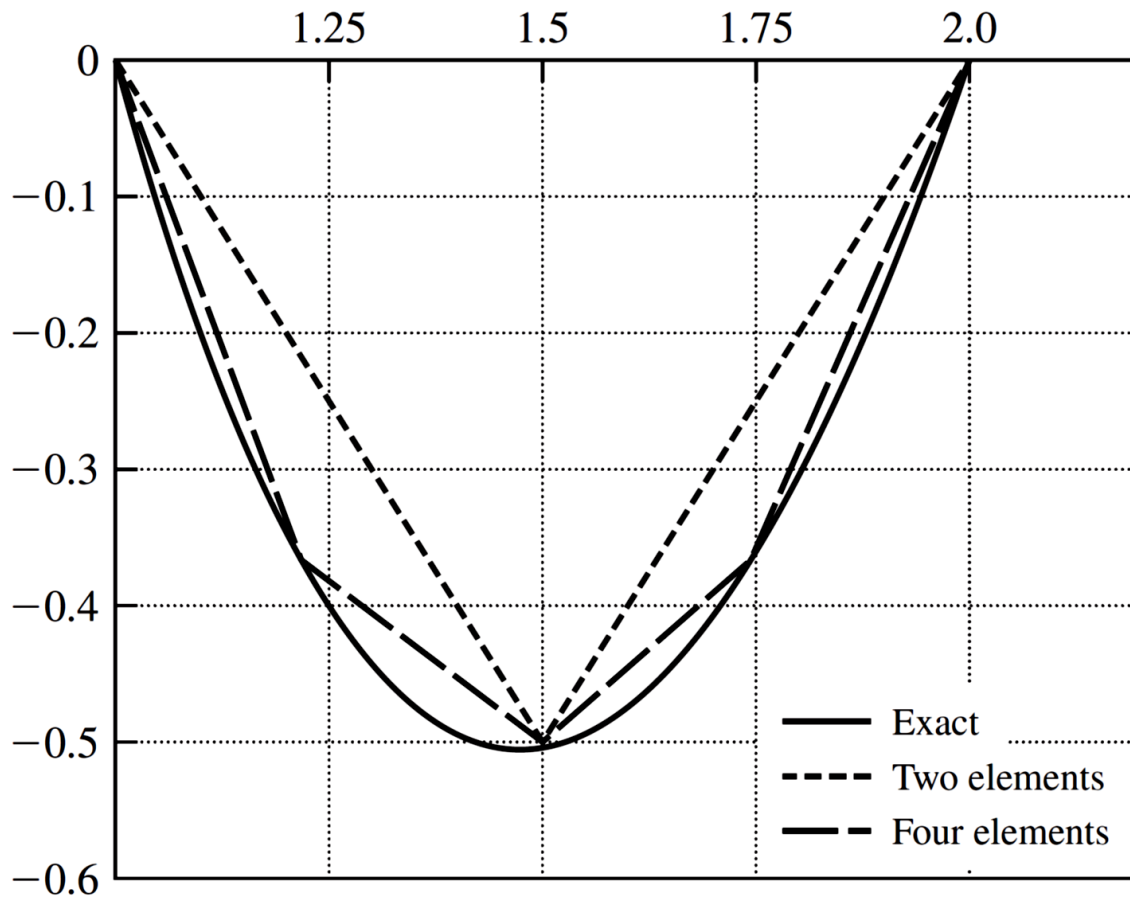
$$Y_3 = -0.5047$$

$$Y_4 = -0.3603$$

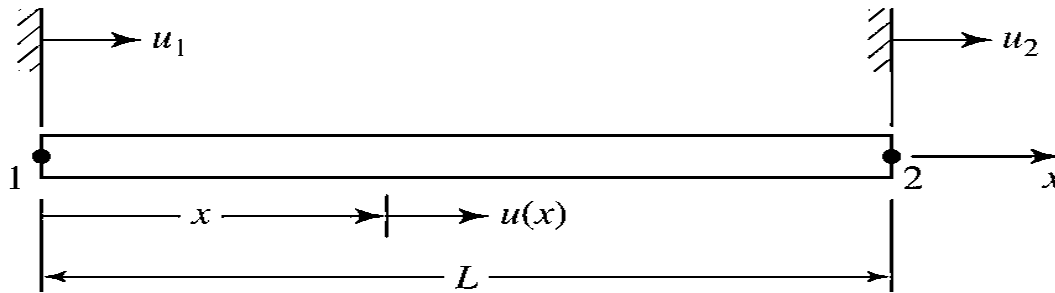
$$\frac{dy}{dx}|_{x_1} = -2.350$$

$$\frac{dy}{dx}|_{x_5} = 1.831$$

مثال ۵



کاربرد روش گالرکین برای المان های سازه ای



المان میله

$$\frac{d\sigma_x}{dx} = \frac{d}{dx} (E\varepsilon_x) = E \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = 0$$

$$u(x) = u_1 N_1(x) + u_2 N_2(x) = u_1 \left(1 - \frac{x}{L}\right) + u_2 \frac{x}{L}$$

$$\iiint_V N_i(x) \left(E \frac{d^2 u}{dx^2} \right) dV = \int_0^L N_i \left(E \frac{d^2 u}{dx^2} \right) A dx = 0 ; i = 1, 2$$

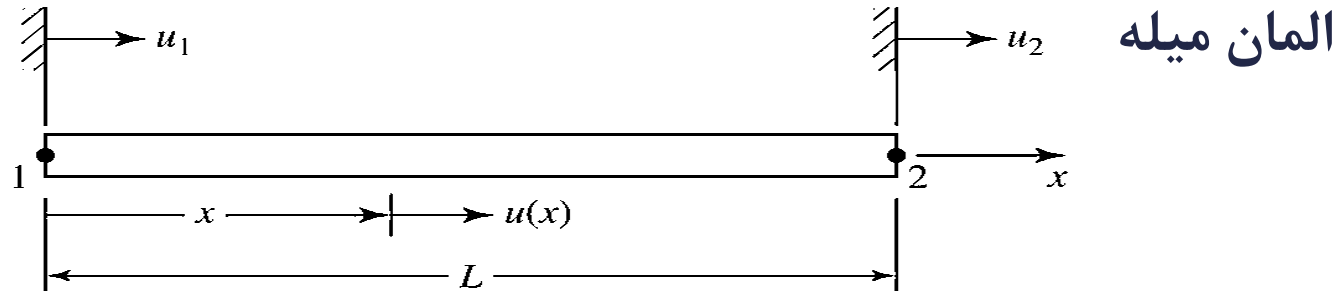
المان میله

$$\int_0^L N_i \left(E \frac{d^2 u}{dx^2} \right) A dx = 0$$

$$\Rightarrow AE \int_0^L \frac{dN_i}{dx} \frac{du}{dx} dx = N_i AE \frac{du}{dx} \Big|_0^L$$

$$AE \int_0^L \frac{dN_1}{dx} \frac{d}{dx} (u_1 N_1 + u_2 N_2) dx = -AE \frac{du}{dx} \Big|_{x=0} = -AE \varepsilon \Big|_{x=0} = -A \sigma \Big|_{x=0}$$

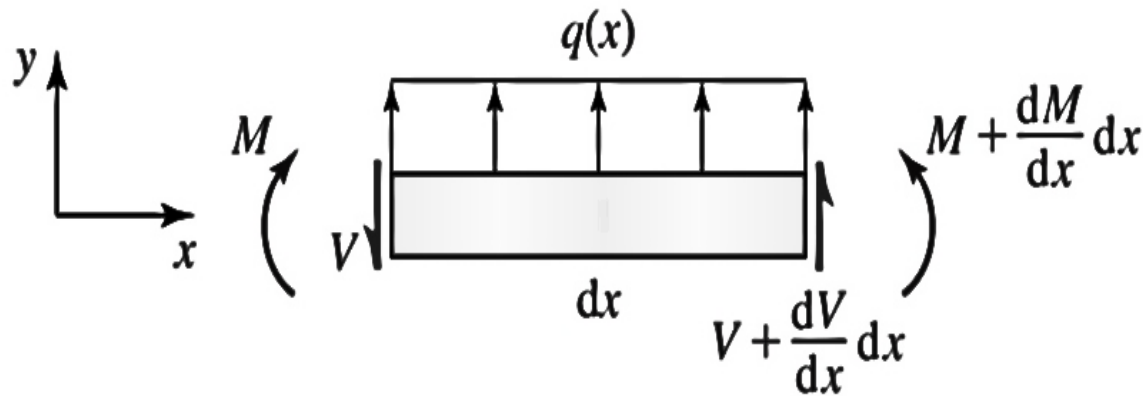
$$AE \int_0^L \frac{dN_2}{dx} \frac{d}{dx} (u_1 N_1 + u_2 N_2) dx = AE \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} = AE \varepsilon \Big|_{x=L} = A \sigma \Big|_{x=L}$$



$$AE \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_1}{dx} \frac{dN_2}{dx} \\ \frac{dN_2}{dx} \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dx} \frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix} dx \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

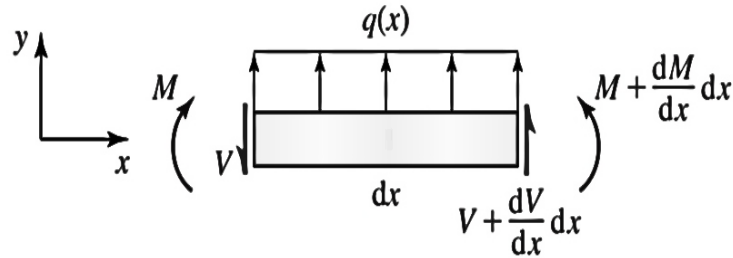
المان تیر



مقطع دیفرانسیلی از تیر بارگذاری شده

$$-V + \left(V + \frac{dV}{dx} dx \right) + q(x) dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dx} = -q(x)$$



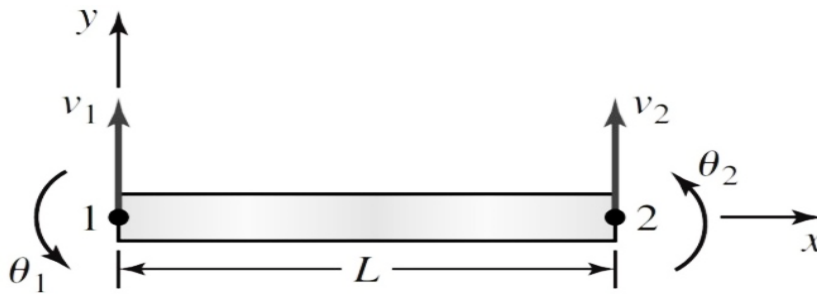
$$M + \frac{dM}{dx} dx - M + \left(V + \frac{dV}{dx} dx \right) dx + [q(x)dx] \frac{dx}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dM}{dx} = -V$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = q(x)$$

$$M = EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} \Rightarrow \frac{d^2}{dx^2} \left(EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} \right) = q(x)$$

المان تیر



$$v(x) = N_1(x)v_1 + N_2(x)\theta_1 + N_3(x)v_2 + N_4(x)\theta_2 = \sum_{i=1}^4 N_i(x)\delta_i$$

$$R(x) = \frac{d^2}{dx^2} \left(EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} \right) - q(x)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} N_i(x) \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} \right) - q(x) \right] dx = 0 \quad i = 1, 4$$

المان تیر

$$\int_{x_1}^{x_2} N_i(x) \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} \right) - q(x) \right] dx = 0$$

با انتگرال گیری به روش
جزء به جزء:

$$N_i(x) EI_z \frac{d^3 v}{dx^3} \Big|_{x_1}^{x_2} - EI_z \int_{x_1}^{x_2} \frac{dN_i}{dx} \frac{d^3 v}{dx^3} dx - \int_{x_1}^{x_2} N_i q(x) dx = 0 \quad i = 1, 4$$

$$V = -\frac{dM}{dx} = -\frac{d}{dx} \left(EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} \right) = -EI_z \frac{d^3 v}{dx^3}$$

$$EI_z \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2 N_i}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} dx = \int_{x_1}^{x_2} N_i q(x) dx - N_i EI_z \frac{d^3 v}{dx^3} \Big|_{x_1}^{x_2} + \frac{dN_i}{dx} EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} \Big|_{x_1}^{x_2} \quad i = 1, 4$$

با انتگرال گیری دوباره به
روش جزء به جزء:

المان تیر

$$EI_z \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2 N_i}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} dx = \int_{x_1}^{x_2} N_i q(x) dx - N_i EI_z \frac{d^3 v}{dx^3} \Big|_{x_1}^{x_2} + \frac{dN_i}{dx} EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} \Big|_{x_1}^{x_2} \quad i = 1, 4$$

$$[k]\{\delta\} = \{F\}$$

معادله فوق، به صورت ماتریسی:

$$k_{ij} = EI_z \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2 N_i}{dx^2} \frac{d^2 N_j}{dx^2} dx \quad i, j = 1, 4$$

$$F_i = \int_{x_1}^{x_2} N_i q(x) dx - N_i EI_z \frac{d^3 v}{dx^3} \Big|_{x_1}^{x_2} + \frac{dN_i}{dx} EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} \Big|_{x_1}^{x_2} \quad i = 1, 4$$

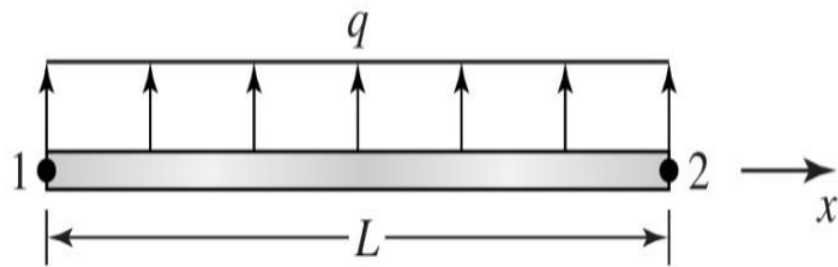
المان تیر

$$F_i = \int_{x_1}^{x_2} N_i q(x) dx - N_i EI_z \frac{d^3 v}{dx^3} \Big|_{x_1}^{x_2} + \frac{dN_i}{dx} EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} \Big|_{x_1}^{x_2} \quad i = 1, 4$$

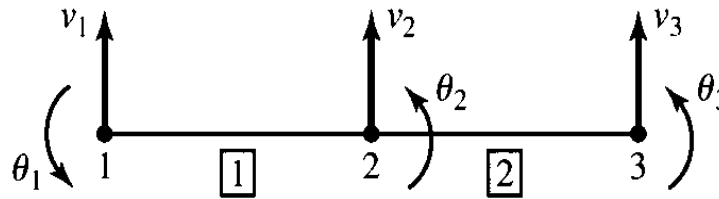
$$F_i = \int_{x_1}^{x_2} N_i q(x) dx + N_i V(x) \Big|_{x_1}^{x_2} + \frac{dN_i}{dx} M(x) \Big|_{x_1}^{x_2} \quad i = 1, 4$$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} \frac{qL}{2} - V_1 \\ \frac{qL^2}{12} - M_1 \\ \frac{qL}{2} + V_2 \\ -\frac{qL^2}{12} + M_2 \end{Bmatrix}$$

برای بار گسترده یکنواخت:



المان تیر



برای دو المان تیر مجاور در محل گره مشترک، یکی از دو شرایط نیرو و لنگر زیر ممکن است رخ دهد:

✓ اگر هیچ نیرو یا لنگر خارجی بر گره وارد نشود، مقادیر برش و لنگر در رابطه فوق برای المان های مجاور برابر و دارای جهت مخالف می باشند و لذا در مرحله مونتاژ حذف می گردند.

✓ اگر نیروی متمرکزی در گره وارد شود، مجموع نیروهای برشی مرزی برای المان های مجاور در آن گره باید با نیروی وارده برابر باشد.

✓ به طور مشابه، اگر لنگر متمرکزی وارد شود، مجموع لنگرهای خمشی مرزی باید در آن گره با لنگر وارده برابر باشد.

سخن آخر

❖ روش باقی مانده های وزنی و به طور خاص روش اجزاء محدود گالرکین:

ابزار ریاضی قدرتمندی برای فرمول بندی روند حل مسائلی که بتوان معادله دیفرانسیل حاکم و شرایط مرزی آن را نوشت.

❖ روش گالرکین: ارائه فرمول بندی دقیقا مشابه قضیه اول کاستیلیانو یا اصل

انرژی پتانسیل حداقل